

Feuille 2
Tribus, fonctions de répartition, v.a., espérance, densités

Tribus, mesures de probabilité, fonctions de répartition, v.a.

Exercice 1. Démontrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité P sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation.

Exercice 2 (Tribu engendrée par une variable aléatoire). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux événements. Quelle est la tribu engendrée par $\mathbf{1}_A$? Quelle est la tribu engendrée par $\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$?

Exercice 3 (Lemme de Fatou). Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

- (1) Montrer que $P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n)$.
- (2) Montrer que $\limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n)$.

Exercice 4.

- (1) Soit $(A_\beta)_{\beta \in B}$ une famille d'événements deux-à-deux disjoints sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que si $P(A_\beta) > 0$ pour tout $\beta \in B$, alors l'ensemble d'indices B est fini ou dénombrable.
- (2) Soit F la fonction de répartition d'une probabilité P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On rappelle que $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P([-\infty, x]).$$
 - (a) Montrer que F est continue à droite et admet des limites à gauche, croissante, $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$.
 - (b) Montrer que F est continue si et seulement si $P(\{x\}) = 0$ pour tout x réel.
 - (c) En déduire que le nombre de points de discontinuité de la fonction de répartition F d'une probabilité est fini ou dénombrable. Peut-il être infini ?
 - (d) En déduire que F est continue sur un ensemble dense.

Exercice 5. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, et $f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une variable aléatoire positive telle que $\int_{\Omega} f dP = 1$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on définit

$$P^f(A) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A f dP.$$

Montrer que P^f est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 6 (Classes monotones). Une famille $\mathcal{M}$ d'un ensemble E est appelée classe monotone si

- (1) $E \in \mathcal{M}$;
- (2) $A, B \in \mathcal{M}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$ (stabilité par soustraction);
- (3) $(A_n)_{n \geq 0}$ suite croissante d'éléments de $\mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{M}$.

Le but de cet exercice est de s'intéresser aux liens entre tribus et classes monotones, et comment cela s'avère utile dans la caractérisation des mesures de probabilités.

- (1) Pour toute famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$, on note $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{F}$. Justifier l'existence de $\mathcal{M}(\mathcal{F})$.
- (2) On remarque que toute tribu est une classe monotone (en particulier, $\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$, on a $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$). Inversement, montrer qu'une classe monotone stable par intersection finies est une tribu.
- (3) On considère une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que si $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie, alors $\mathcal{M}(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.
- (4) [Application] Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{C}$ une classe d'ensembles stable par intersection finie engendrant $\mathcal{A}$. Montrer que si P_1 et P_2 sont deux mesures de probabilités sur $\mathcal{A}$ telles que P_1 et P_2 coïncident sur $\mathcal{C}$, alors P_1 et P_2 sont égales sur $\mathcal{A}$.

Espérance, variance, lois classiques

Exercice 7. Pour chacune des lois classiques (discrètes/à densité) vues en cours, calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ suivant cette loi. Pour les variables discrètes, retrouver le résultat à l'aide de la fonction génératrice.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n) > 0$. Montrer que si $\lambda > 0$, X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si pour tout $n \geq 1$, $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$.

Exercice 9. Soit X une v.a. de moyenne μ et de variance σ^2 finies. Montrer que $P(\mu - d\sigma < X < \mu + d\sigma) \geq 1 - \frac{1}{d^2}$.
(Noter que cette inégalité n'a d'intérêt que si $d > 1$.)

Exercice 10. Soient $0 < \mu < 1$, $k \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(X = n) = k\mu^n$ pour $n \geq 0$.

(1) Déterminer k .

(2) On définit pour $x \in]-1, 1[$ la série $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$. Calculer $f(x)$.

(3) Calculez l'espérance $\mathbb{E}(\frac{1}{1+X})$.

Exercice 11.

(1) Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrez que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

(2) Soit Y une v.a. réelle positive. Montrez que $\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}^+} P(Y > t) dt$.

Fonctions de répartition et densités

Exercice 12. On suppose que la durée de vie d'un individu est une v.a. T dont la densité est $f(t) = kt(100-t)$ si $0 \leq t \leq 100$, et 0 sinon.

(1) Déterminer k , puis calculer l'espérance $\mathbb{E}(T)$.

(2) Quelle est la probabilité pour qu'un individu meure après 80 ans ?

(3) Même question sachant que l'individu a atteint l'âge de 50 ans.

Exercice 13 (Intensité d'une v.a. continue). Soit X une v.a.r. telle que $P(X \geq t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On définit l'intensité de X par la limite, si elle existe,

$$h_X(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} P(t \leq X \leq t + \epsilon \mid X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(1) Exprimer h_X grâce à la fonction de répartition F_X de la v.a. X .

(2) On suppose que X est une v.a. dont la loi a pour densité une fonction continue f_X . Donner l'expression de $h_X(t)$ en fonction de $f_X(t)$ et $F_X(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

(3) Calculer l'intensité $h(t)$ en $t > 0$ d'une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (densité $\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0, \infty[}(x)$) et d'une v.a. de Cauchy (densité $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$).